第 48 講　総合問題⑯

1　正の数 x に対して，3 辺の長さが　$\mathrm{AB}=x+1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{x^2+x+1}$，$\mathrm{CA}=k\sqrt{x}$　で与えられる三角形 ABC を考える．次の問いに答えよ．

(1)　$x=2$　のとき，三角形 ABC が存在するような k の値の範囲を求めよ．

(2)　任意の正の数 t に対して不等式

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\geqq 2+\sqrt{3}\quad \cdots\cdots①$$

および　$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\leqq 2-\sqrt{3}\quad \cdots\cdots②$$

が成立することを示せ．

(3)　(2)の結果を利用して，任意の正の数 x に対して三角形 ABC が存在するような k の値の範囲を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関数 $f(x)$ を　$f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$　により定める．

(1)　a，b は実数とする．$y=ax+b$　のグラフと　$y=f(x)$　のグラフがちょうど２つの交点を持つための a，b に対する条件を求めよ．

(2)　p，q は実数で $p>0$ とする．$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$　のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど４つの交点を持つための p，q に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　平面上の点で，その座標が両方とも整数であるものを格子点と呼ぶ．原点をＯとし，Ｏ以外の格子点Ｐに対して，線分OP上にあるＯとＰ以外の格子点の個数を $n(\mathrm{P})$ で表す．たとえば点P(2，3)については $n(\mathrm{P})=0$ である．条件

$$1 \leqq a \leqq 30 \quad かつ \quad 1 \leqq b \leqq 30 \quad かつ \quad n(\mathrm{P})=4$$

をみたす格子点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の個数を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　総合問題⒃

a，b を定数とする関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ が条件

　㈦ $f(1)=p$　（p は $p\geqq 1$ を満たす定数）　　㈧ $x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

を満たしているとき，次の問いに答えよ．

⑴　定数 a がとる範囲を p を用いて表すと　$-\boxed{ア}-\boxed{イ}\sqrt{p}\leqq a\leqq p-\boxed{ウ}$ である．

⑵　定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ が最小値をとるとき，$b=\boxed{エ}$ である．また，その最小値が 2 となるのは　$p=\dfrac{\boxed{オカ}}{4}$　のときである．

⑶　p が⑵で求められた値をもつとき，定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ の最大値は $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケコ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　総合問題⒃

1　正の数 x に対して，3 辺の長さが　$AB=x+1$，$BC=\sqrt{x^2+x+1}$，$CA=k\sqrt{x}$　で与えられる三角形 ABC を考える．次の問いに答えよ．

⑴　$x=2$　のとき，三角形 ABC が存在するような k の値の範囲を求めよ．

⑵　任意の正の数 t に対して不等式

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\geqq 2+\sqrt{3}\quad\cdots\cdots①$$

および　$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\leqq 2-\sqrt{3}\quad\cdots\cdots②$$

が成立することを示せ．

⑶　⑵の結果を利用して，任意の正の数 x に対して三角形 ABC が存在するような k の値の範囲を求めよ．

⑴　$x=2$ のとき　$AB=3$　　$BC=\sqrt{7}$　　$CA=k\sqrt{2}$

三角形の成立条件より　$3-\sqrt{7}<k\sqrt{2}<3+\sqrt{7}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}<k<\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}}$

⑵　$t>0$ のとき　$\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\geqq 2\sqrt{\sqrt{t}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t}}}=2$　　$t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

等号成立はともに $t=1$ のとき

よって　$\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\dfrac{1}{t}+1}\geqq 2+\sqrt{2+1}=2+\sqrt{3}$　（等号成立は $t=1$ のとき）

したがって①は示された．このとき①の両辺は正よりそれぞれの辺で逆数をとって

$$\frac{1}{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}}\leqq\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$$

$$(\text{左辺})=\frac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}}{\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2-\left(t+\frac{1}{t}+1\right)}=\frac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}}{t+2+\frac{1}{t}-\left(t+\frac{1}{t}+1\right)}$$

$$=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}$$

よって　$\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\dfrac{1}{t}+1}\leqq 2-\sqrt{3}$　より②は示された．

（等号成立は $t=1$ のとき）

⑶　$x>0$ のとき　$BC=\sqrt{x^2+x+1}<\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=x+1=AB$　より

$BC<AB$

よって三角形の成立条件より　$x+1-\sqrt{x^2+x+1}<k\sqrt{x}<x+1+\sqrt{x^2+x+1}$

両辺を $\sqrt{x}$ で割って　$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}<k<\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}$　……③

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)より　$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}\leqq 2-\sqrt{3}$　　$2+\sqrt{3}\leqq\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}$

より

③が任意の正の数 x で成立する k の値の範囲は　$\boldsymbol{2-\sqrt{3}<k<2+\sqrt{3}}$　である．

2　関数 $f(x)$ を　$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$　により定める．

(1)　a，b は実数とする．$y=ax+b$　のグラフと　$y=f(x)$　のグラフがちょうど２つの交点を持つための a，b に対する条件を求めよ．

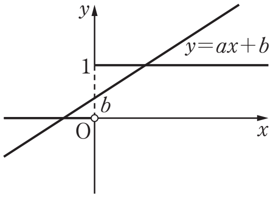
(2)　p，q は実数で $p>0$ とする．$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$　のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど４つの交点を持つための p，q に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ．

---

(1)　直線 $y=ax+b$ の傾き a について　$a>0$　であることが必要

このとき　直線の y 切片 b について　$0<b\leqq 1$　であれば題意を満たす．

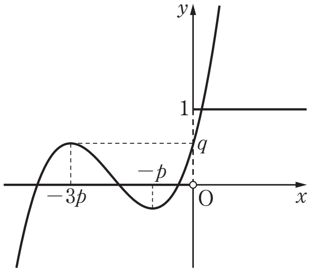
よって求める条件は　$\boldsymbol{a>0,\ 0<b\leqq 1}$



(2)　$g(x)=x^3+6px^2+9p^2x+q$　とおくと

$g'(x)=3x^2+12px+9p^2=3(x+3p)(x+p)$　$(p>0)$

x	$\cdots$	$-3p$	$\cdots$	$-p$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	q	↘	$-4p^3+q$	↗



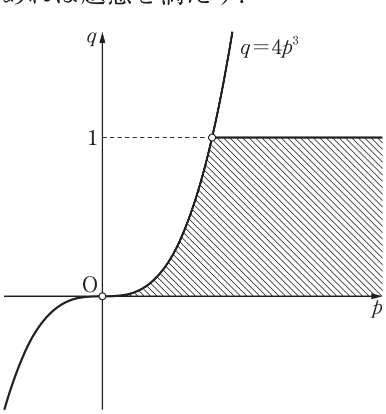
よって　$g(-3p)=g(0)=q$　について $0<q\leqq 1$

$g(-p)=-4p^3+q$　について $-4p^3+q<0$　であれば題意を満たす．

したがって求める条件は　$\boldsymbol{0<q\leqq 1,\ q<4p^3}$

これらの表す領域は右図斜線部分．

境界は $q=4p^3$　および $q=0$ 上の点を含まず他は含む．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　平面上の点で，その座標が両方とも整数であるものを格子点と呼ぶ．原点を O とし，O 以外の格子点 P に対して，線分 OP 上にある O と P 以外の格子点の個数を $n(\mathrm{P})$ で表す．たとえば点 P(2，3) については $n(\mathrm{P})=0$ である．条件

$1\leqq a\leqq 30$　かつ　$1\leqq b\leqq 30$　かつ　$n(\mathrm{P})=4$

をみたす格子点 P$(a,\ b)$ の個数を求めよ．

OP：$y=\dfrac{b}{a}x$　これを　$y=\dfrac{n}{m}x$（m，n は互いに素の自然数）とおく．

この直線上にある格子点（O を除く）は

$(m,\ n)$，$(2m,\ 2n)$，$(3m,\ 3n)$，……　である．

$n(P)=4$　より　$(a,\ b)=(5m,\ 5n)$ である．

また，$1\leqq a\leqq 30$，$1\leqq b\leqq 30$　より　$1\leqq 5m\leqq 30$　　$1\leqq 5n\leqq 30$

つまり $1\leqq m\leqq 6$，$1\leqq n\leqq 6$　である．

(i)　$m=n$ のとき

m，n は互いに素より　$m=n=1$　　よって　$(a,\ b)=(5,\ 5)$

(ii)　$m<n$ のとき

$n=2$ のとき　$m=1$　　よって　$(a,\ b)=(5,\ 10)$

$n=3$ のとき　$m=1,\ 2$　　よって　$(a,\ b)=(5,\ 15)$，$(10,\ 15)$

$n=4$ のとき　$m=1,\ 3$　　よって　$(a,\ b)=(5,\ 20)$，$(15,\ 20)$

$n=5$ のとき　$m=1,\ 2,\ 3,\ 4$　　よって　$(a,\ b)=(5,\ 25)$，$(10,\ 25)$，$(15,\ 25)$，$(20,\ 25)$

$n=6$ のとき　$m=1,\ 5$　よって　$(a,\ b)=(5,\ 30)$，$(25,\ 30)$

よって P の個数は 11

(iii)　$m>n$ のとき

(ii)において m と n を入れ替えることにより，P の個数は 11

以上より求める P の個数は　$11\times 2+1=\mathbf{23}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第48講　総合問題⒃

a，b を定数とする関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ が条件

㋐　$f(1)=p$　（p は $p\geqq 1$ を満たす定数）　　㋑　$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

を満たしているとき，次の問いに答えよ．

⑴　定数 a がとる範囲を p を用いて表すと　$-$［ア］$-$［イ］$\sqrt{p}\leqq a\leqq p-$［ウ］である．

⑵　定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ が最小値をとるとき，$b=$［エ］である．また，その最小値が2となるのは　$p=\dfrac{\text{［オカ］}}{4}$　のときである．

⑶　p が⑵で求められた値をもつとき，定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ の最大値は $\dfrac{\text{［キク］}}{\text{［ケコ］}}$ である．

条件㋐より　$1+a+b=p$　……①

⑴　$f(x)=x(x^2+ax+b)$　より　$f(0)=0$

よって条件㋑より　$x>0$ のとき　$f(x)\geqq 0$　すなわち　$x^2+ax+b\geqq 0$　であればよい．

①より　$x^2+ax+b=x^2+ax+p-a-1$　これを　$g(x)$ とおく．軸：$x=-\dfrac{a}{2}$

$-\dfrac{a}{2}\leqq 0$　つまり　$a\geqq 0$　のとき　　$g(0)=p-a-1\geqq 0$　よって　$0\leqq a\leqq p-1$

$-\dfrac{a}{2}\geqq 0$　つまり　$a\leqq 0$　のとき

$g(x)=0$ の判別式 D について　$D=a^2-4(p-a-1)\leqq 0$

$a^2+4a-4p+4\leqq 0$　　$-2-2\sqrt{p}\leqq a\leqq -2+2\sqrt{p}$

よって　$-2-2\sqrt{p}\leqq a\leqq 0$

以上より　$\mathbf{-2-2\sqrt{p}\leqq a\leqq p-1}$

⑵　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$　……②

①より　②$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{p-a-1}{2}=-\dfrac{a}{6}+\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{4}$　……③

③を a の関数とみると単調減少．

よって　⑴より　$a=p-1$　のとき最小値をとる．このとき　①より　$\mathbf{b=0}$

さらにこのとき，②$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{3}$ が2となるのは　$a=\dfrac{21}{4}$ のとき．このとき　$p=\mathbf{\dfrac{25}{4}}$

⑶　$p=\dfrac{25}{4}$　のとき　③$=-\dfrac{a}{6}+\dfrac{23}{8}$　これが最大となるのは

⑴より　$a=-2-2\sqrt{p}=-7$　のとき．よって求める最大値は　$\dfrac{7}{6}+\dfrac{23}{8}=\mathbf{\dfrac{97}{24}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。